大家一起做多孔螺旋型與鑽石型三度週期 最小曲面的串珠模型(下)—實作

莊宸^{a、}左家靜^{b、}金必耀*^c

a 美國麻省理工學院化學系、b 國家高速網路與計算中心、*c 國立臺灣大學化學系
*byjin@ntu.edu.tw

■ 摘要

本文詳細闡釋多孔螺旋與鑽石型最小曲面串珠模型的製作過程,包括螺旋長條型帶子的製作方法,長帶的兩種連結方式,以及含有約八個晶胞的此兩種2x2x2多孔類石墨烯體的組裝程序。最後希望讀者不僅從模型製作過程中,習得此類奈米結構的立體幾何,所製作的成品更可作為具有數學與科學內涵的藝術品。

關鍵字:物理模型、分子模型、串珠模型、 三度週期最小曲面、多孔螺旋最小曲面、鑽 石型最小曲面、石墨烯結構

"There is a beautiful collection of polyhedral models in wire and cardboard at Winchester College. These were made by three boys, F. J. Dyson, M. S. and H. C. Longuet-Higgins, two of whom have later become university professors."

— H. M. Cundy and A. P. Rollett, in "Mathematical Models"

■ 引言

前文「三度週期最小曲面的串珠模型 (上)」簡單地介紹 P、D、G 三種最基本的 三度週期最小曲面的背景知識 ¹⁻⁵。在本文 中,我們將實際的串珠程序模組化,並仔細解釋基本螺旋長帶單元的製作,以及整個 D 與 G 兩種結構的連接的過程。

■ 單元製作

我們將一個2x2x2的G曲面沿z方向 切割,可分解成十六條螺旋的長條單元(參 見圖1),不難看出每一條長帶先是以其一 側與鄰帶相接,旋轉半個螺距後,再以帶子 的另一側與同一鄰帶相接。將製作這樣分解

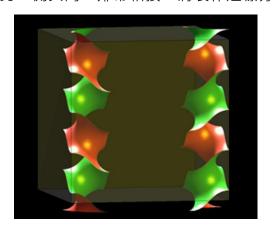


圖 1:2 x 2 x 2 的 G 型曲面可分解為 16 條 的螺旋帶子。注意螺旋長帶是左旋、右旋交替排列的。如果把螺旋長帶的兩側想像 成 DNA 的兩股,那麼螺旋長帶中凹下去的地方就很像 DNA 中的大溝(major groove)與小溝(minor groove)。

的好處是,每個螺旋單元很容易由僅有 初步串珠經驗的人製作,可使最為冗長 的部分由很多的人一起參與,而且不易 發生錯誤。另外一個好處是,D 曲面也 可以分解成一樣的長條帶子,所以同一 種基本單元,可以用來製作兩種不同的 三度週期最小曲面。

由六邊形與八邊形交替所組成·相鄰的兩個八邊形由一個六邊形以對位方式相接(圖3)·因此用這種方式連結而成的結構可用<u>高柏格(Goldberg)向量(2,0)表示。原則上·我們可以用其它高柏格向量來建構不同的最小曲面·但本文將以(2,0)結構為討論重心。</u>

圖中我們用了三種顏色來表示不同的八邊形·用來表示三種不同的八邊形所朝的方向(參見本文首頁中的串珠模型圖示)·讀者可

以選擇自己喜好的顏色。G 與 D 曲面中的八邊形所處的局部環境完全一樣,但這些八邊形所朝的方向(即法線方向)可以分為三類,分別指向 x、y、z 方向,我們所剪裁的長帶中的八邊形,則分別朝向 x 與 y 方向,圖 3

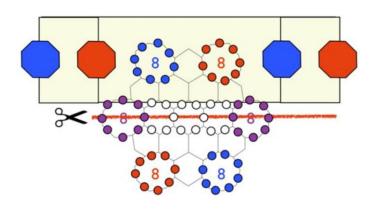


圖 2:長條帶子的剪裁。圖中繪製的石墨烯片是一個六苯並苯單元·環繞這六個八邊形與六個六邊形。

中選擇藍色與紅色來表示這兩種八邊形,而 長帶的邊緣的紫色珠子則是朝向 z 方向的八 邊形一部分,將在進行組合時,才會完成。 圖 3 中通過每一個多元環的粗線是一個可能 的編織路徑,根據過去的經驗,魚線兩端長 度消耗的速率大致一樣,是一個不錯的選擇。

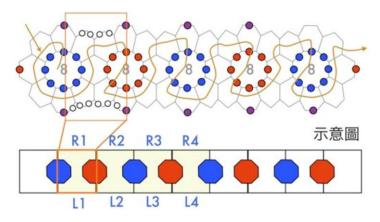


圖 3:圖上為長帶單元的平面圖與一個建議的編織路徑; 圖下是一條長帶的示意圖·示意圖中的灰色區域是一個重 複單元·兩側分為四段·用 R1, R2, R3, R4 與 L1, L2, L3, L4 表示。

選取長度為珠子總直徑兩倍的長度,按 照八字編的技巧,循著編織路徑即可一線到 底,此時魚線正好通過長條內側的珠子兩 次,而邊緣的珠子則正好通過一次,注意應 避免將魚線穿過邊緣的珠子超過一次,將來縫合長條單元時,魚線自然會再一次通過這些邊緣珠子。當然圖中所示的編織路也不是唯一的,讀者不難找出其他通過每一個一次而且一次的路徑。初學者建議使用6到10mm的珠子·及0.6到0.8mm的釣魚用的尼龍線。以十六人為一單位,進行分工,每人至少製作一個結構單元。



圖 4: 單條的螺旋長帶。

所製做成的串珠模型如圖 4 所示,我們 不能將此長條帶子攤在平面上,這與完全由 六邊形組成的長條是不一樣,原因是在此長 條中的八邊形會產生負的高斯曲率,整條帶 子因而無法平躺在一個平面上, 迫使長條帶 子逐漸扭曲而形變。經過適當的操弄,長帶 可以變成一條逐漸沿一個方向旋轉的螺旋帶 子,四個八邊形正好會使得串珠長帶單元扭 轉一個螺距。要做出一個2x2x2的串珠模 型,每個長條螺旋單元應該包含至少八個八 邊形,約等於是兩個螺距,但最後實際做出 來的 G 型曲面的串珠模型,沿 z 方向會稍微 長些,並非正好是2 x 2 x 2 (參見前文圖2 的 G 曲面圖像),讀者不妨思考,若是要正 好做出2 x 2 x 2,應該如何調整基本單元長 帶的串法。

為了要簡化相鄰長帶間的連接方式,我們用圖 3 中的下側的示意圖來表示一條長帶,並且進一步將一個螺距分為四段,每一

段稱為一個段距。為了方便描述,兩側各四個段距分別編號為 R1、R2、R3、R4,以及L1、L2、L3、L4、這八個段距分別與環繞在前後左右四個相鄰長帶的某一段距相連接。每一相鄰長帶在一個螺距內,用去左右兩側一個連接段距,一個長帶與四個臨帶相接,這樣正樣正好用盡八個段距。

更細的看,每個段距共含有八個珠子,

其中在段距邊緣的兩個珠子與 相鄰的段距共用,每一個珠子 對應到一個碳碳鍵。值得注意 的是,排列成鋸齒型(zigzag) 形式的碳碳鍵,使用珠子串出 來之後是一條相當直的線(圖

3) · 這條直線在八邊形的側邊位置產生轉 折·然後連接著接近直線的另一個段距,最 終·每四個段距組成一個螺距單元。讀者不 妨檢視你所做出來的串珠模型單條螺旋長 帶·應該是非常地柔軟·很容易形變,產生 許多可能的構形·圖 2 中所示的僅是比較接 近扭轉螺旋形式的構形 (twisted helical conformation) · 適合用作進一步結合成鑽石 形週期最小曲面。

■ 兩個單元的組裝規律

這節我們將介紹從基本單元螺旋長帶出發,以兩種不同的組裝的方法,做出兩種不同的三度週期最小曲面,即 D 型曲面與 G 型曲面。 根據筆者的經驗,組裝的過程是整個過程中最重要,最容易發生錯誤的步驟,所以必須非常的小心檢查有關 D 與 G 的結構特徵,一旦發生錯誤,儘早可以進行拆除與修正,由於串珠本質上是一個循序的過程,一

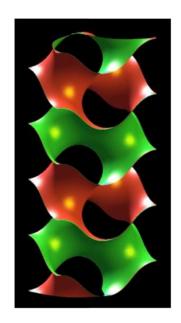


圖 5:相鄰兩條螺旋長帶 結合成一個兩條 G 型曲 面結構。

旦在某一步發生錯 誤,就必須尋原路 徑倒回去,拆除每 一個步驟,所以時

時檢查·確定每 一步驟都是正 確的·是非常重 要的。

再介紹如何連接前·讓我 圖們先熟悉一下圖 5 中所示的兩條螺旋長帶結合成 G 型曲面的形

狀。與圖 1 的兩條獨立螺旋長帶比較,應該會注意到相鄰兩個螺旋長帶一個是左旋,另一個右旋的,而且是將螺旋帶的大溝對著小溝的方式,彼此嵌合在一起,產生一左一右交替,但完全一樣的孔洞。同樣地,D 型曲面的原係是帶也是以一方統一方統

面的兩條長帶也是以一左旋一右旋 相鄰兩條螺旋長帶結合起來,所產 生的孔洞也是完全一樣,但卻是對 稱地位在兩長帶結合的正中間,我 們在後面會有更多關於幾何特徵的 討論。

1. D 型連接

相鄰兩帶的連接處為(R1,L1)

及(R3,L3)。將相鄰兩帶反向排列(見圖6)。 一條是紅藍紅藍排列·另一條則是藍紅藍紅 排列。在段距1處,將相鄰兩帶的R1與L1 連接起來,然後在段距3的地方必需將長帶 扭轉,使得位於外側處的L3、R3扭轉到內 側,然後再連接起來。在實際操作時,不難發現,必需將長帶沿其中軸扭轉為螺旋狀,讓一條是左旋另一條是右旋,才能進行上述的結合。

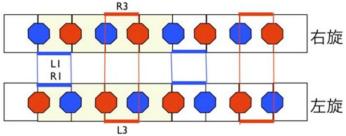


圖 6:D 型曲面中·相鄰兩長帶的連接方式示意圖。 注意兩長帶的顏色走向是相反的。

2. G 型連接

相鄰兩帶的連接處為(R1,L2)及(R3,L4)。將相鄰兩帶同向排列(見圖7)、兩條均是紅藍紅藍排列。先將R1與L2連接起來,然後彎曲兩條長帶,使其一條左旋、另一條右旋,再將R3與L4處的段距連接起來。

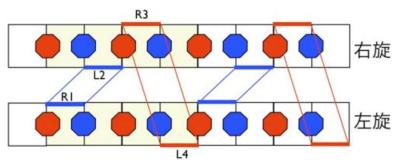


圖 7: G 型曲面中,相鄰兩長帶的連接方式示意圖。 注意兩長帶的顏色走向是相同的。

這兩種連結方式,單條螺旋長帶有不一樣的形變:D型曲面中的長帶以扭轉(twisting)為主,而G型曲面則含有相當程度的彎曲(bending)貢獻。螺旋長帶在三度空間的形狀變化,可以用扭轉(twisting)與

彎曲(bending)的程度來區分。我們這裡所談的扭轉與彎曲的概念·基本上與 DNA 的雙股在三度空間的變化是一樣的,可以想像 DNA 像是一個鐵軌,鹼基對像是鐵軌的枕木·描述 DNA 鐵軌在三度空間中旋轉可以有兩個極限。方便於解釋,先想像兩鐵軌在枕木的中間平均位置所形成曲線稱為中軸曲線。在第一個極限情況,中軸曲線是一條直線,枕木繞著它旋轉,此為純扭轉極限,這對應到的是 Z 型的 DNA。另一極限情況,是

圖 8:D 型曲面中,相鄰兩長帶的連接方式詳圖。

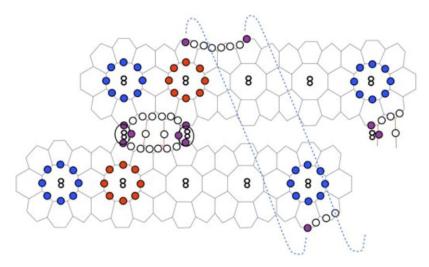


圖 9:G 型曲面中,相鄰兩長帶的連接方式詳圖。

鐵軌完全不繞著中線轉,而是兩鐵軌與中線 一起轉,這是彎曲的極限,有點像是煙卷螺 旋。

回到 P、D、G 三種三度週期最小曲面,D 曲面完全以扭轉為主,P 曲面是彎曲的極限,而 G 曲面則是在兩者之間,有點類似 B型的 DNA,螺旋長帶有一些扭轉,也有一些彎曲。在實際進行相鄰兩長帶的組裝時,會注意這螺旋長帶所產生的變化,組裝 D 曲面時,必須將螺旋長帶沿其中軸線扭轉,而在

組裝 G 曲面時,則必須將長帶進行一定程度的彎曲,再進行連接。

圖 8 與圖 9 給出 D 型與 G 型兩種曲面的螺旋長帶的連接詳圖・連接每一段距・我們需要用到額外的四個珠子・其中兩個屬於面向 z 軸方向的八邊形・使用紫色;另外兩個屬於六邊形・與八邊形並不相接・使用白色的珠子。每條螺旋長帶與鄰帶相接,需要用掉 4 x

16 = 64 個珠子·十六條需接合 24 次·所以共需 64 x 24/2 = 768 個珠子·除以 2 是為了避免重複 計數。還有每一長條用了 250 顆珠子·十六條共 4000 個珠子·所以共需 4768 個珠子·由於還沒有計算最後在上下兩面額外再加的珠子·整個模型應該需要 5000 個珠子左右。



圖 10: 只含兩螺旋長條 D 型曲面的串珠模型

結合兩條螺旋長帶的串珠結構如圖 10 與圖 11 所示,分別對應到 D 型與 G 型結構。 仔細審視,不難看出與前面的討論一樣,我 們所得的 D 型曲面的串珠模型中,螺旋長帶 是以扭轉的方式,與相鄰的長帶彼此結合; 而 G 型曲面的串珠模型,則是以扭轉加上一 定程度的彎曲,再與相鄰的長帶結合。值得 再一次強調的是相鄰的螺旋長帶,一個是左 旋的,另一個則是右旋的。兩個曲面中的孔 動的排列也相當不同, D 型曲面中的孔動, 正好對稱地排列在兩個螺旋的接合處;而 G 圖 11:只含兩螺旋長條 G 型曲面的串珠模型。 型曲面中的孔洞則是一左一右,交替排列。 而目兩種曲面上的八邊形排列方式也不一 樣,D 型曲面上的八邊形分別朝向左右四十

五度方向; G 型曲面上的兩種八邊形, 則是正好對著 x 與 v 軸的方向。讀者 也應不難注意到,D 型曲面的平移週 期較短,正好是 G 型曲面的一半。以 圖 10 中的 D 型曲面為例,深紫色的八 邊形,長帶每轉一圈,深紫色的八邊 形就重複一次;而 G 曲面則是長帶多 轉一圈,才會重複,因此圖 10 中的 D

曲面,沿著長帶的 z 方向,共轉了 4 次;但 是圖 11 中的 G 型曲面只重複兩次。另外,



使用同樣長度的螺旋長帶,製作出來的 D 型 曲面會比 G 型曲面更為狹長。



圖 12:最後完成的 G 型曲面串珠模型。

■ 2x2x2模型的組裝

一旦掌握到相鄰兩個螺旋長帶的兩 種連結方式,便可以開始連結其他的螺旋 長帶,可以有許多分工的方式,我們的建 議如下,首先將十六條兩兩連接,這樣便 有如圖 10 或是圖 11 中的兩條結構共八 **個,接下來可以將**它們其中兩個,先連接 成一個四條單元,再依序一次連接兩條單 元上去,最後變形成最後接近2x2x2的 三度週期最小曲面(圖 12)。

還有一點是當所有的邊都接完時,應不

難注意到上下兩個面並沒有平行於 xy 平 方面可以讓更多的人參與,另一方面也顧及 面,所以需

要額外再 編織適當 數目的珠 子,填滿上 下 兩 個 面。用同樣 的螺旋長 帶單元,也 可以繼續 製作更大 的 D 型曲 面,圖13 中的左圖

模型是僅

含有四條





變,因此以兩長帶單元為基礎,是考慮到一

圖 13:圖左是根據本文所介紹的方法將四條螺旋長帶所組成的 D 型曲面串珠模 型;圖右是直接將四面體單元逐一所構建的結構。

螺旋長帶的 D 型曲面,而右圖則是用不同的 方式所建構的 D 型曲面的串珠模型 6, 可見 相同結構的最小曲面,使用不同的切割與構 築方式,最後所產生的串珠模型,也有截然 不同的感覺。

如果參與的學生有三十幾人,可以分成 兩組,分別進行 D 型與 G 型曲面的製作。讀 者可能會問,為什麼不將所有的兩條單元, 均先接成柱行的四單元結構,然後再兩兩結 合,變為八個單元結構,最後再變成十六單 元的最後模型。這樣的作法,主要困難在進 行接合時, 並不是很容易進行串珠, 因為需 要從兩個相當硬結構的中間,由裡往外串, 導致無法進行連接。通常如圖 10 或是圖 11 中的兩長帶單元並不是很硬,可以適當地形 較方便串珠,可以在最短時間,讓最多的人 參與,最後完成這兩個模型。

用本文所使用的螺旋長帶做出發點,並

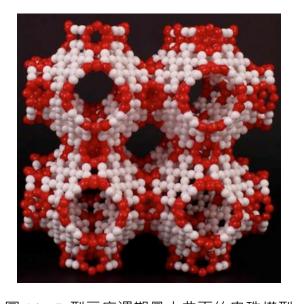


圖 14:P 型三度週期最小曲面的串珠模型

無法建構 P 型三度週期最小曲面,但是 P 型曲面的結構相對單純,存在有許多的鏡面對稱,直接看著圖 14 的 P 型曲面結構,可以很容易理解整個結構中不同區域的相對關係,讀者應該可以很容易地用做出此結構的串珠模型。

最後,我們再重複一次有關這三種週期 最小曲面的兩個重要結構特徵,可作為實際 進行編織時檢查是否正確,但僅適用於高柏 格(2,0)向量的 P、D 與 G 型曲面:

- 每一個八邊形旁,以對位方式,環繞著四個另外兩種顏色彼此交替的八邊形, 見圖 15 之左圖。
- 環繞在六苯並苯旁,共有六個八邊形, 顏色交替變換,見圖 15 之右圖。

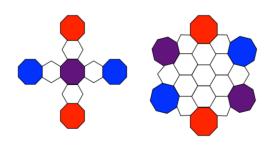


圖 15: P、D、G 三種週期最小曲面中的鄰近八邊形的相對位置關係圖。

3. 八邊形總是處在對位的關係,也就是<u>高</u>柏格向量為(2,0)。

■ 結論

本文介紹建構 G 與 D 型曲面的一個簡單方法,參與者僅需要知道基本編織規律,掌握到單元的製作方法,與單元間的連接方式,即可進行這兩個三度週期最小曲面串珠

模型建構。整個串珠過程可視為用數學串珠進行一個分子類比計算,計算出來的結果,就是這兩個類石墨烯的近似三度空間結構,通過模組化,可以讓學生學習互助合作,米計算工作的類比計算,最後得出大型等人類,是這種大型等人類,不同學對科學的興趣,還可以提昇同學對科學的興趣,還可以提昇同學對對學的興趣,從而學習到奈米的人工的人類,特別是三度週期最小曲面等相關知識。學與立體幾何的認識,從而學習對對對學學,特別是三度週期最小曲面等相關知識。學與立體幾何的認識,從而學習到新結構,特別是三度週期最小曲面等相關知識。學有這些美麗的模型更可啟發同學對為結構,甚至從而啟發創作自己的科學學藝術作品。

"I am overwhelmed by the beauty of the ingenious beaded structures you and your colleagues have created. I can appreciate how much time and effort it must have taken to reach a satisfactory implementation of these structures."

— Alan Schoen

■ 致謝

本文作者感謝臺灣大學新興物質與前瞻 元件科技研究中心與量子科學與工程中心對 於本計劃的支持,並感謝國科會支持我們持 續在科學與藝術交叉領域中進行探索^{7,8}。

■ 參考文獻

- 1. Saranathan V.; Osuji, C.O.; Mochrie, S.G.; Noh, H.; Narayanan, S.; Sandy, A.; Dufresne, E.R. *Proc. Natl. Acad. Sci. U S A.* **2010**, 107, 11676-81.
- 2. Schoen, A. H. *Interface Focus*, **2012**, 2 658-668.
- 3. Hyde, S. T.; O'Keeffe, M; Proserpio, D.

- M. Angew. Chem. Int. Ed. **2008**, 47, 7996-8000.
- 4. Hyde, S. T.; Andersson, S.; Blum, Z.; Lidin, S.; Larsson, K.; Landh, T.; Ninham, B. W. The Language of Shapes The role of curvature in condensed matter physics, chemistry and biology, Elsevier, 1997.
- 5. 金必耀,大家一起做多孔螺旋與鑽石型 三度週期最小曲面的串珠模型(上)— 立體幾何介紹·臺灣化學教育 2014。
- 6. 本文並未介紹製作圖 13 右側的 D 型結構,此模型為臺大化學系同學<u>魏緯齊</u>使用另一種方法所製作,對於本文作者理解這些週期最小曲面有重要的啟發。
- 7. Chuang, C.; Jin, B.-Y.; Wei, W.-C.; Tsoo, C.-C. *Proceedings of Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science*, **2012**, 503-506.
- 8. Chuang, C.; Jin, B.-Y.; Wei, W.-C. 2012 *Joint Mathematical Meetings Exhibition of Mathematical Art*, ed. by R. Fathauer and N. Selikoff, Tessellations Publishing **2012**, 17.